

Title	Vector-lattice, 特ニ談話980ニツイテ
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 227 p.623-p.628
Issue Date	1941-12-05
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74914
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

984. Vector lattice, 特ニ談話 980ニツイテ

中山 正 (阪大)

前号ノ談話 980ニ於ケル吉田 — 深富氏ノ興味アル
定理ニツキ, ソレガ Lovenzen, *Math. Zeitschr.*
45 (1939) ノ論文ノ結果ヲ使ツテモ出スコトが出来るコ
トヲ注意シタイト思ヒマス。即チ Lovenzen ハ一般ノ
partially ordered abelian group ニツキ色
々興味アリ且ツ重要ナ結果ヲ出シテキルワケデスガ *lattice*
的デナク整数論的 = *Teilbarkeit* デ言ツテキルノゾー

寸或ル意味デ見ニク、ナツテキル点モアリマスが、ソノ
lattice 的言葉へ、翻譯ハ Clifford が *Annals*
 マツテキル通りデアリマス。

サテ *Vector lattice* 従ッテ (一般、*partially ordered* デナク) *lattice-ordered abelian group* が我々ノ問題デスカラ、ソレニダケ考察ヲ限リ
 マスト、ソレハ Lovenizen ノ §3 デアリ、ソコノ主定理ガ *Satz 11* (コレト §2, *Satz 4* ヲ組合セタモノト
 イフベキデセウ) デアリ、ソレハ Clifford モ言ツテキ
 ル通り「任意ノ *lattice-ordered abelian group* G ハ適當ニ (有限又ハ無限個ノ) *linearly ordered abelian groups* T_c ノ直積ノ中ニ *trien-embed*
 サレル。即チ $G \ni x =$

$$(\text{-----}, x(\tau), \text{-----}) \quad (\tau = x(\tau) \in T_c)$$

ガ對應シテ $\tau \rightarrow (\text{-----}, x(\tau), \text{-----})$ ナル對應
 ハ *trien* 且ツ G ニオケル群算法 (加法的ニカキマス) 及
 ビ束算法ハ *Componentwise* ニシタノニ對應スル:

$$x + y \rightarrow (\text{-----}, x(\tau) + y(\tau), \text{-----})$$

$$x \wedge y \rightarrow (\text{-----}, x(\tau) \wedge y(\tau), \text{-----})$$

トイフ事ニナリマス。

$x \rightarrow x(\tau)$ ハ G カラ T_c ノ中ヘノ *lattice ordered group* トシテノ準同型寫像デスカ、 T_c ハ余分ノ
 所ガナク恰度 G ノ像ダケ、即チ $x \rightarrow x(\tau)$ ガ T_c ノ上
 ニノ準同型デアルトシテ係ヒマセンカラ、以下サウシマス。

實數ヲ operator = モツ lattice-ordered abelian group 即チ vector lattice / 場合コノ定理ガ operators ヲ考ヘ=入レテ成立スルコトハ明カデアリマセウ。

サテ, $G =$ 單位 I (アルキメデス / 意味 / 單位) ガアルト假定シマス. 即チ任意ノ $x \in G =$ 對シテ適當ナルヲトレバ $nI \geq |x|$.

然ラバ $I(\tau)$ ガ $T_c =$ オケル單位デアルコトハ明カデアル. 更ニアル元 $x \in G$ ガ nilpotent デアルトハ吉田 — 深宮氏ニ從ツテ $I \geq m|x|$ for all $m = 1, 2, \dots$ ナルコトノスレバ, ソノタメニハスベテノ τ ニツイテ $I(\tau) \geq m|x(\tau)|$ for all $m = 1, 2, \dots$ ナルコトガ必要且ツ充分ナルコトモ明カデアアル. 即チ各 $x(\tau)$ ガ T_c ノ nilpotent ナル事デアアル.

$G \rightarrow$ 實數ナル表現ニオイテ nilpotent $\rightarrow 0$ ハ明カデアアルカラ, 吉田 — 深宮氏ノ定理ノ証明ニハソノ逆, スナハチ x ガ nilpotent デナケレバ $x \rightarrow \alpha \neq 0$ ナル G ノ表現 (實數ニヨル) ガアルコトヲ云ヘバヨイ. 然ルニ x ガ nilpotent デナクレバ上述ノ如ク適當ナテヲトレバ, $x(\tau)$ ガ T_c ノ nilpotent デナイ. ソコデアタコノ T_c ノ $T_c \rightarrow$ 實數ナル表現デ $x(\tau)$ ハ 0 デナイ實數ニウツルコトヲ云ヘバヨイ ($G \rightarrow T_c \rightarrow$ 實數, $x \rightarrow x(\tau) \nrightarrow 0$)

即チ linearly ordered, T (但シ單位 I ヲ有

ス) = ツイテ云へバヨイ。然レソレハ殆ンド明カデアアル。
 即チ Γ ハ (I ヲ有スルカラ) 確カニーツノソシテ (*linear* ガカラ) タビーツノ *maximal ideal* (吉田氏ノ意味、*Birkhoff* ノ言葉ナラ *normal subspace*)
 M ヲモチ、 Γ/M ハ *simple* ナ *vector lattice* ガカラ実数ノ *vector lattice* デアル。然ルニ M ハ Γ ノ *nilpotent* ナ元ノ全体デアアル。何故ナラ M ノ元ノ絶対値 (x ハリ $\in M$) ヲ何倍シテモ (x ハリ $\in M$) ハ I ヲコヘタイ (従ツテ $\leq I$, 何者 Γ ハ *linearly ordered*)。
 何故ナラ $I \not\subset M$ ガカラデアアル。逆ニ $x \not\in M$ ナラ ($x \neq 0$ ナル表現 $\Gamma \rightarrow \Gamma/M$ ガアルノダカラ) x ハ *nilpotent* デナイ。(ナホ *Clifford* ノコアル *Hahn* ノ定理ヲツカヘバ更ニ明カデスガ、ソノ必要モナイワケデス)

コレデ定理ガ証明サレタワケデアアル。

ナホコノ吉田 — 深宮氏ノ結果ニツキ、單位ガアルコトガ、重要デアアルコトヲ示スタメ先日ノおペレ—ションノ會ノ時一寸オ話シシタ例モ *Lovenzon* ヲヨク見マシタラソノ p.550 ノ上部ニアル例ト殆ンド同ジモノデアアルコトヲ知リマシタ。氣がツカナイデ居タコトハ汗顔ノ至リデス。ナホ上記ノヤウニ *Lovenzon* ガ使ヘルコトナド氣がツカズ居タノモオ恥シイ次第デス。

ナホ、*Vector-lattice* = ツイテノ種々ナル結果 = ツイテ少クモ純代数的ナ点ニ因スル限リ、上記 *Lovenzon* ノ一般定理 (*Clifford* 式ニ解釈シテ)

カラ言ツタ方が簡單ニナルモ、が多クナルノデハナイカト
思ヒマス。

同論文ニツイテハ次ノ拙文ヲモ参照サレタイト思ヒマ
スガ、Vector-lattice 的ニイフニハ乗法的デナク
加法的ニ書イタ方が見易イデスガ、次ノ拙文デハ non-
commutative ナ群ヲ取扱ツタノデマハリ Lovenzen
同様乗法的ニカキマシタ。ソレヲ念ノタメ、ここニソコノ
言葉ノ Vector-lattice 的ナ言葉ヘノ翻訳ヲ書イテオ
キマス。(ソノナ必要モナイデセウガ!)、ナホ lattice
ノ場合、即チ同論文ノ §3ニミ限ルコトニシマス。

Vollständig が lattice-ordered ノコトハ
明カ。マタ \cup トハ \vee dualニシタ方が Vector-lattice
ノ言葉ニ云ヒ易イデセウ。t-Ideal ノ意味ハ Clifford
デ云ツテアル通りニ束トシテ Ideal, s-Ideal ハ
M-closure. 従ツテ 545 頁ノ 5 行目ノ式

$$a = \frac{a(1 \vee a)^{-1}}{(1 \vee a)^{-1}} \text{ ハ (essentially } = \wedge) a \text{, 正,}$$

負部分ヘノ分解 $a = a^+ + a^-$ ニ相當シ、同ノ 8 行目ノ

$$\frac{1}{1 \vee a} \vee \frac{1}{1 \vee a^-} = 1 \text{ ハ正, 負部分が直交: } a^+ \wedge (-a^-)$$

$= 0$ ニ相當スルヲケ。ソシテ quotient semi-group
 \mathcal{O}_S ノ Einheiten ノ集合 (即チ $\mathcal{O}_P - \mathcal{P}\mathcal{O}_P$) が
Birkhoff, normal subspace 即チ吉田サノい
でやゑニナリマス。然レテソノ際 " \mathcal{O}_P デノ Teilbarkeit
ヲ order ヲツケテ" トイフ、ガ " \cup ノ normal

subspace を mod. トシテ" トイフコト=ナルト思
ヒマス。

Lovén 1 方法 / 巧ミサハ, 丁度 linear =
ナル様ナ t -Primideal を使ツテアル所デアリ、実際
=オイテハ maximal ナ t -Primideal, 即チ
residue class vector-lattice が linear ナ
ル如キ normal subspace トシテハ minimal
ナモ / 使ツテアツテ maximal / デナイ点 = フルト
思フ。ソノタメ = I モナクマタ アレキメデス 的デナクトモ
ソノ "存在" = ツイテハ何等心配ナシ (Sat 4), ソシ
テ アレキメデス 的デナクテ $tren$ ナ表ハシ方ヲ得テキ
ルワケデアルト思フ。ソシテコノ兎モ角 linear = マデ
モツテ行クコトノ可能性 = ツイテハ, 吉田サンモ独立 = 最
近 (紙上デナク黑板上ノ) 談話会デ注意サレタ所デアアリ
マシタ。

—— 以上 ——